ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ QUỲNH PHƯƠNG

PHƯƠNG PHÁP "QUỸ ĐẠO" VÀ ỨNG DỤNG VÀO GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔ HỢP DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ GIỎI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ QUỲNH PHƯƠNG

PHƯƠNG PHÁP "QUỸ ĐẠO" VÀ ỨNG DỤNG VÀO GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔ HỢP DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ GIỎI

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. Trịnh Thanh Hải

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Một số ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{N}$	Tập hợp các số tự nhiên.
$\mathbb{N}^*$	Tập hợp các số tự nhiên khác 0.
$\mathbb{Z}$	Tập hợp các số nguyên.
$\mathbb{R}$	Tập hợp các số thực.
MO	National Mathematical Olympiad.
IMO	Internation Mathematical Olympiad.

Lời nói đầu

1. Lý do chọn đề tài

Toán tổ hợp là một bài toán khó, thường xuất hiện trong các kì thi học sinh giỏi cấp tỉnh, cấp quốc gia và quốc tế. Chính vì vậy toán tổ hợp luôn dành được sự quan tâm rất lớn từ các bạn học sinh, các thầy, cô giáo và các nhà toán học.

Một trong các phương pháp có hiệu quả để giải một số bài toán tổ hợp là phương pháp "quỹ đạo". Ý tưởng của phương pháp "quỹ đạo" là chỉ ra cách giải thích hình học để đưa ra lời giải cho bài toán tổ hợp, mà chủ yếu là các bài toán tổ hợp đếm các đường đi (hay số các "quỹ đạo") theo một tính chất xác định nào đó (hay còn gọi là phương pháp quy các bài toán đếm về các bài toán đếm số đường đi trên lưới nguyên).

Phương pháp "quỹ đạo" không chỉ ứng dụng được vào giải một số bài toán tổ hợp liên quan đến lưới nguyên mà còn có thể vận dụng được để đưa ra lời giải cho một số bài toán về dãy số. Mặt khác, với các bài toán tối ưu hóa quen thuộc trong kinh tế, kỹ thuật như: Tìm đường đi ngắn nhất, tìm chu trình đi tối ưu nhất... thì ngoài các phương pháp quen thuộc như quy hoạch động, thử sai quay lui... ta có thể vận dụng tư tưởng của phương pháp "quỹ đạo" để đưa ra các thuật toán "tốt" hơn.

Xuất phát từ thực tế trên và với mục đích tích lũy thêm các kiến thức về cách giải bài toán đếm của toán tổ hợp với phương pháp "quỹ đạo" và vận dụng vào giải một số bài toán đếm trong các đề thi học sinh giỏi trong nước và quốc tế làm tư liệu cho công việc giảng dạy của bản thân, em đã lựa chọn hướng nghiên cứu vận dụng phương pháp "quỹ đạo" vào giải một số bài toán đếm.

Luận văn tập trung vào hoàn thành các nhiệm vụ chính sau

- Tìm hiểu về bài toán đếm của toán tổ hợp và các nguyên lý, tính chất của toán tổ hợp thường được vận dụng để đưa ra lời giải cho các bài toán đếm.
- Ý tưởng toán học của phương pháp "quỹ đạo" trong việc tìm lời giải cho bài toán đếm của toán tổ hợp.

- Sưu tầm một số bài toán, đề thi về bài toán đếm của toán tổ hợp dành cho học sinh giỏi.
- Đưa ra ý nghĩa của khái niệm "quỹ đạo" và phương pháp "quỹ đạo" thông qua thuật toán đường đi của con Robot.

2. Nội dung của đề tài luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo, luận văn gồm 2 chương

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị

1.1. Bài toán đếm trong toán tổ hợp.

1.2. Một số nguyên lý, tính chất của toán tổ hợp thường được vận dụng vào giải bài toán đếm của toán tổ hợp.

1.3. Một số phương pháp giải bài toán đếm của toán tổ hợp trong phạm vi chương trình toán Trung học phổ thông.

Chương 2. Vận dụng phương pháp "quỹ đạo" vào giải một số bài toán tổ hợp

2.1. Phương pháp "quỹ đạo".

2.2. Một số vận dụng.

2.3. Ý nghĩa của khái niệm "quỹ đạo" và phương pháp "quỹ đạo".

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình, chu đáo của thầy PGS. TS Trịnh Thanh Hải, các thầy cô giáo trong khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học cùng toàn thể các bạn trong lớp Cao học K11 đã tạo mọi điều kiện, nhiệt tình ủng hộ em trong suốt quá trình làm luận văn. Em xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành, sâu sắc với tất cả những đóng góp quý báu của thầy cô và các bạn đặc biệt là thầy PGS. TS Trịnh Thanh Hải. Tuy đã có nhiều cố gắng trong quá trình làm luận văn, nhưng do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Kính mong nhận được sự góp ý của quý thầy, cô và các bạn.

Em xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 28 tháng 12 năm 2019

Tác giả luận văn

Phạm Thị Quỳnh Phương

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1 Bài toán đếm trong toán tổ hợp

Trong toán tổ hợp, bài toán đếm là bài toán nhằm trả lời câu hỏi: "Có bao nhiêu cấu hình tổ hợp thuộc dạng đã cho?".
Phương pháp đếm thường dựa vào một số quy tắc, nguyên lý đếm và một số kết quả đếm cho các cấu hình tổ hợp đơn giản.
Hai quy tắc đếm cơ bản là quy tắc cộng và quy tắc nhân.

Hai quy tắc đếm cơ bản

Định nghĩa 1.1.1. *(a). Quy tắc cộng: Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện, hành động thứ hai có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m+n$ cách thực hiện.*

(b). Quy tắc nhân: Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì có $m.n$ cách hoàn thành công việc.

Hoán vị

Định nghĩa 1.1.2. *Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.*
• *Kí hiệu: P_n là số các hoán vị của n phần tử.*
• *Số các hoán vị: $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$.*

Chỉnh hợp

Định nghĩa 1.1.3. *Cho tập hợp A gồm n phần tử* $(n \geq 1)$. *Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.*
- *Kí hiệu:* A_n^k *là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử,* $1 \leq k \leq n$.
- *Số các chỉnh hợp:* $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n.(n-1)\cdots(n-k+1)$ *(với* $1 \leq k \leq n$*).*

Nhận xét: Mỗi hoán vị của n phần tử cũng là một chỉnh hợp chập n của n phần tử đó nên $P_n = A_n^n$.

Tổ hợp

Định nghĩa 1.1.4. *Giả sử tập A gồm n phần tử* $(n \geq 1)$. *Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.*
- *Kí hiệu:* C_n^k *là số các tổ hợp chập k của n phần tử* $(0 \leq k \leq n)$.
- *Số các tổ hợp:* $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ *(với* $1 \leq k \leq n$*).*

Nhận xét:

(a). $C_n^k = C_n^{n-k}$ $(0 \leq k \leq n)$.

(b). (công thức Pascal): $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$ $(1 \leq k \leq n)$.

Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa 1.1.5. *Cho tập A có m phần tử. Ta rút ra từ A một phần tử bất kỳ, kí hiệu nó là* a_1 *rồi trả lại nó vào tập hợp A. Ta lại rút ra từ A một phần tử, kí hiệu nó là* a_2 *(*a_2 *có thể lại chính là phần tử thứ nhất) rồi trả lại nó vào tập hợp A. Tiếp tục thao tác này k lần (k không nhất thiết nhỏ hơn hoặc bằng m), ta tìm được một dãy* $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ *gồm k phần tử (có thể trùng nhau) của A. Một dãy như thế gọi là một chỉnh hợp có lặp chập k của m phần tử đã cho. Tập hợp tất cả các chỉnh hợp có lặp chập k lập nên từ các phần tử của một tập hợp A có m phần tử chính là tập hợp các bộ* $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ *với* $a_i \in A$. *Vậy đó là tích Đề-các* $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ lần}} = A^k$.

Định lý 1.1.1. *Số chỉnh hợp có lặp chập k của m phần tử, kí hiệu là* $\overline{A_m^k}$ *, được tính theo công thức* $\overline{A_m^k} = \left|A^k\right| = m^k$.

Chứng minh. Rõ ràng có m cách chọn một phần tử từ tập m phần tử cho mỗi một trong k vị trí của chỉnh hợp khi cho phép lặp. Vì vậy theo quy tắc nhân, có m^k chỉnh hợp lặp chập k từ tập có m phần tử. □

Hoán vị lặp

Trong bài toán đếm, một số phần tử có thể giống nhau. Khi đó cần phải cẩn thận, tránh đếm chúng hơn một lần.

Định lý 1.1.2. *Số các hoán vị của n phần tử trong đó có n_1 phần tử như nhau thuộc loại 1, có n_2 phần tử như nhau thuộc loại 2, $\cdots$ và có n_k phần tử như nhau thuộc loại k bằng* $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$.

Chứng minh. Để xác định số hoán vị trước tiên chúng ta nhận thấy có $C_n^{n_1}$ cách giữ n_1 số cho n_1 phần tử loại 1, còn lại $n - n_1$ chỗ trống.
Sau đó, có $C_{n-n_1}^{n_2}$ cách đặt n_2 phần tử loại 2 vào hoán vị, còn lại $n - n_1 - n_2$ chỗ trống.
Tiếp tục đặt các phần tử loại 3, loại 4, $\ldots$, loại $k-1$ vào chỗ trống trong hoán vị. Cuối cùng có $C_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}^{n_k}$ cách đặt n_k phần tử loại k vào hoán vị.
Theo quy tắc nhân tất cả các hoán vị có thể là:

$$C_n^{n_1}.C_{n-n_1}^{n_2}\cdots C_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

□

Tổ hợp lặp

Một tổ hợp lặp chập k của một tập hợp là một cách chọn không có thứ tự k phần tử có thể lặp lại của tập đã cho. Như vậy một tổ hợp lặp kiểu này là một dãy không kể thứ tự gồm k thành phần lấy từ tập n phần tử. Do đó có thể là $k > n$.

Định lý 1.1.3. *Số tổ hợp lặp chập k từ tập n phần tử bằng* C_{n+k-1}^k.

Chứng minh. Mỗi tổ hợp lặp chập k từ tập n phần tử có thể biểu diễn bằng một dãy $n-1$ thanh đứng để phân cách các ngăn. Ngăn thứ i chứa thêm một ngôi sao mỗi lần khi phần tử thứ i của tập xuất hiện trong một tổ hợp. Mỗi dãy $n-1$ thanh và k ngôi sao ứng với một tổ hợp lặp chập k của n phần tử. Do đó mỗi dãy ứng với một cách chọn k chỗ cho k ngôi sao từ $n+k-1$ chỗ chứa $n-1$ thanh và k ngôi sao. Đó là điều cần chứng minh. □